

Εφαρμογές

1) Εάν $0 < x < y$ τότε να βρεθεί το όριο της ακολουθίας
 $a_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, $x, y > 0$

ΛΥΣΗ

$$0 < x < y \Rightarrow 0^n < x^n < y^n \Rightarrow y^n < x^n + y^n < 2y^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{y^n} < \sqrt[n]{x^n + y^n} < \sqrt[n]{2y^n} \Rightarrow y < \sqrt[n]{x^n + y^n} < y \cdot \sqrt[n]{2}$$

αφού $\lim y = y$ εφόσον $y = \text{σταθ.}$

και

$$\lim y \sqrt[n]{2} = \lim y \cdot 2^{1/n} = y \cdot 2^0 = y.$$

Άρα, από θεωρήματα προσκλινομένων ακολουθιών

$$\lim \sqrt[n]{x^n + y^n} = y.$$

2) Να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

i. $\lim \frac{7^n + 2^n}{4 \cdot 7^n + 5^n}$, ii. $\lim \frac{5n^3 - 4n^2 + n + 1}{n^3 - n^2 + 1}$

iii. $\lim \frac{n! + 5^n}{7^n + n!}$, iv. $\lim \left(\frac{n^2}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{n^3+n} \right)$

ΛΥΣΗ

i. $\lim \frac{7^n + 2^n}{4 \cdot 7^n + 5^n} = \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{7}\right)^n \rightarrow 0}{4 + \left(\frac{5}{7}\right)^n \rightarrow 0} = \frac{1}{4}$

ii. $\lim \frac{5n^3 - 4n^2 + n + 1}{n^3 - n^2 + 1} = \lim \frac{5 - 4 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \rightarrow 0}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \rightarrow 0} = 5$

iii. $\lim \frac{n! + 5^n}{7^n + n!} = \lim \frac{1 + \frac{5^n}{n!}}{1 + \frac{7^n}{n!}} \quad \textcircled{1}$

Θεώρημα εις γενική περίπτωση: $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

και βρισκαμε το οριο $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{v+1}}{\gamma_v}$.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{v+1}}{\gamma_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{v+1}}{(v+1)!}}{\frac{a_v}{v!}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a}{v+1} = 0, \text{ εφοσον } a = \text{σταθ.}$$

Αρα, η ακολουθια συγκλινει στο 0 τοτε το ιδιο και η ακολουθια.

Επομεως, $\lim_{v \rightarrow \infty} \gamma_v = 0$.

Αρα, ορι οριση ①.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{S}{v!}}{\frac{F^v}{v!} + 1} = 1.$$

$$\text{iv) } \frac{v^2}{v^3+1} + \frac{v^2}{v^3+2} + \dots + \frac{v^2}{v^3+v} = v^2 \left(\frac{1}{v^3+1} + \frac{1}{v^3+2} + \dots + \frac{1}{v^3+v} \right)$$

Θωρα ως μεγαλο ορο τον $\frac{1}{v^3+1}$
και ως μικρο ορο τον $\frac{1}{v^3+v}$.

Αρα, λαμβων τα ατομα:

$$\frac{1}{v^3+v} \leq \frac{1}{v^3+1} \leq \frac{1}{v^3+1}, \dots, \frac{1}{v^3+v} \leq \frac{1}{v^3+v} \leq \frac{1}{v^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v^3+v} \leq \frac{1}{v^3+1} + \dots + \frac{1}{v^3+v} \leq \frac{v}{v^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^3}{v^3+v} \leq \frac{v^2}{v^3+1} + \dots + \frac{v^2}{v^3+v} \leq \frac{v^3}{v^3+1}.$$

$$\text{Εφοσον, } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^3}{v^3+v} = 1 \text{ \& } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^3}{v^3+1} = 1.$$

τοτε απο θ. λογαριθμικων ατοματων.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\frac{v^2}{v^3+1} + \frac{v^2}{v^3+2} + \dots + \frac{v^2}{v^3+v} \right) = 1.$$