Εφαρμογές

1) Εαν $0<x<y$ τότε να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_\nu = \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu}$, $x, y > 0$

ΛΥΣΗ

$$0<x<y \Rightarrow 0^\nu < x^\nu < y^\nu \Rightarrow y^\nu < x^\nu + y^\nu < 2y^\nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[\nu]{y^\nu} < \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu} < \sqrt[\nu]{2y^\nu} \Rightarrow y < \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu} < y \cdot \sqrt[\nu]{2}$$

αφού $\lim y = y$ εφόσον $y =$ σταθ.

και

$$\lim y \sqrt[\nu]{2} = \lim y \cdot 2^{1/\nu} = y \cdot 2^0 = y.$$

Άρα, από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$$\lim \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu} = y$$

2) Να υπολογιστούν τα ακόλουθα όρια:

i. $\lim \dfrac{7^\nu + 2^\nu}{4 \cdot 7^\nu + 5^\nu}$, ii. $\lim \dfrac{5\nu^3 - 4\nu^2 + \nu + 1}{\nu^3 - \nu^2 + 1}$

iii. $\lim \dfrac{\nu! + 5^\nu}{7^\nu + \nu!}$, iv. $\lim \left(\dfrac{\nu^2}{\nu^3+1} + \dfrac{\nu^2}{\nu^3+2} + \dots + \dfrac{\nu^2}{\nu^3+\nu} \right)$

ΛΥΣΗ

i. $\lim \dfrac{7^\nu + 2^\nu}{4 \cdot 7^\nu + 5^\nu} = \lim \dfrac{1 + \cancel{\left(\frac{2}{7}\right)^\nu}^{\to 0}}{4 + \cancel{\left(\frac{5}{7}\right)^\nu}^{\to 0}} = \dfrac{1}{4}$.

ii. $\lim \dfrac{5\nu^3 - 4\nu^2 + \nu + 1}{\nu^3 - \nu^2 + 1} = \lim \dfrac{5 - 4 \cdot \cancel{\frac{1}{\nu}}^{0} + \cancel{\frac{1}{\nu^2}}^{0} + \cancel{\frac{1}{\nu^3}}^{\to 0}}{1 - \cancel{\frac{1}{\nu}}^{0} + \cancel{\frac{1}{\nu^3}}^{\to 0}} = 5$.

iii. $\lim \dfrac{\nu! + 5^\nu}{7^\nu + \nu!} = \lim \dfrac{1 + 5^\nu/\nu!}{1 + 7^\nu/\nu!}$ ①.

Θεωρώ ευ γενική περίπτωση : $\gamma_\nu = \dfrac{a^\nu}{\nu!}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

και βρίσκουμε το όριο $\lim \frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu}$.

$$\lim \frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu} = \lim \frac{\frac{a^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{\frac{a^\nu}{\nu!}} = \lim \frac{a}{\nu+1} = 0 \quad , \text{εφόσον } a = \text{σταθ.}$$

Αφού, η υπακολουθία συγκλίνει στο 0 τότε το ίδιο και η ακολουθία.

Επομένως, $\lim \gamma_\nu = 0$.

Άρα, στη σχέση ①.

$$\lim \frac{1+\cancel{\frac{5^\nu}{\nu!}}^{\to 0}}{\cancel{\frac{7^\nu}{\nu!}}^{\to 0}+1} = 1.$$

iv) $\frac{\nu^2}{\nu^3+1} + \frac{\nu^2}{\nu^3+2} + \dots + \frac{\nu^2}{\nu^3+\nu} = \nu^2 \cdot \left(\frac{1}{\nu^3+1} + \frac{1}{\nu^3+2} + \dots + \frac{1}{\nu^3+\nu} \right)$

Θεωρώ ως μεγάλο όρο τον $\frac{1}{\nu^3+1}$

και ως μικρό όρο τον $\frac{1}{\nu^3+\nu}$

Άρα, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\frac{1}{\nu^3+\nu} \le \frac{1}{\nu^3+1} \le \frac{1}{\nu^3+1}, \dots, \frac{1}{\nu^3+\nu} \le \frac{1}{\nu^3+\nu} \le \frac{1}{\nu^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu}{\nu^3+\nu} \le \frac{1}{\nu^3+1} + \dots + \frac{1}{\nu^3+\nu} \le \frac{\nu}{\nu^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nu^3}{\nu^3+\nu} \le \frac{\nu^2}{\nu^3+1} + \dots + \frac{\nu^2}{\nu^3+\nu} \le \frac{\nu^3}{\nu^3+1}$$

Εφόσον, $\lim \frac{\nu^3}{\nu^3+\nu} = 1$ & $\lim \frac{\nu^3}{\nu^3+1} = 1$.

τότε από Θ. ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$$\lim \left(\frac{\nu^2}{\nu^3+1} + \frac{\nu^2}{\nu^3+2} + \dots + \frac{\nu^2}{\nu^3+\nu} \right) = 1.$$